الثانية علوم رياضية	فرض 1 دورة 2	2015-14

التمرين الأول

الجزء (1) ليكن n عدد طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $g_n(x) = n\ln x - \frac{1}{x}$

1) أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g_n(x)$

2) اعط جدول تغيرات الدالة g_n

أ- بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n و استنتج إشارة $g_n(x)$

ب- بين أن $1 < \alpha_n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و استنتج أن $\alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج- استنتج أن $(\alpha_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها و بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\alpha_n - 1) = 1$

الجزء (2) لكل عدد طبيعي غير منعدم n ،

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ بما يلي : $x > 0$; $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{\ln x}$ و $f_n(0) = 0$

1) أحسب النهايات $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_n(x)$

2) بين أن الدالة f_n متصلة على يمين النقطة $a = 0$

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين النقطة $a = 0$

أ- بين أن $f_n'(x) = \frac{e^{nx}}{(\ln x)^2} g_n(x)$ $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}\right)$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f_n

4) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

5) أرسم المنحنى (C_1) (نعطي $\alpha_1 \simeq 1,75$ و $f_1(\alpha_1) \simeq 10,2$)

التمرين الثاني :

لكل عدد طبيعي n

نعتبر التكاملات التالية : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \; dt$ و $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \; dt$

1) أحسب a_0 ; b_O

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3) أ- بين أن $t \le \frac{\pi}{2}\sin t$ $\left(\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

ب- استنتج أن $0 < b_n \le \frac{\pi^2}{4}(a_{2n} - a_{2n+2})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_{2n}} = 0$

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_{2n+2} = (2n+2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \; dt$$

ب- استنتج أن : $\frac{a_{2n+2}}{n+1} = (2n+1)b_n - (2n+2)b_{n+1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج- استنتج أن : $2\left(\frac{b_n}{a_{2n}} - \frac{b_{n+1}}{a_{2n+2}}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

5) أ- بين أن المتتالية $U_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ متقاربة و أن نهايتها هي $\frac{\pi^2}{6}$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$